Métodos de aproximación numérica

¿Problemática?

Necesitamos integrar una función continua complicada o una función tabulada donde los valores de x y $f(x)$ *están dados como un conjunto discreto* de puntos.

Usamos métodos de integración numéricos para obtener la integral aproximada

- Formas cerradas de las fórmulas de integración de Newton-Cotes
  - Regla del trapecio
  - Regla de Simpson 1/3
  - Regla de Simpson 3/8
- Integración de Romberg

Integración de Romberg

- Es una técnica de Integración de ecuaciones
- Se basa en la extrapolación de Richardson que es un método es un método que **combina** dos estimaciones numéricas de la integral para obtener un tercer valor más exacto.
- Es una técnica recursiva, se basa en aplicaciones sucesivas de la regla del trapecio
- Se utiliza para generar una estimación/aproximación de la integral dentro de una tolerancia de error preespecificada

Integración de Romberg

- Técnica recursiva … **combina** dos estimaciones/aproximaciones numéricas de la integral para obtener un tercer valor más exacto.

- Esas dos estimaciones o aproximaciones se obtienen de aplicar la regla del trapecio

	$O(h^2)$				…
$n = 1$	$I_{1,1}$				

Integración de Romberg

- Técnica recursiva … **combina** dos estimaciones/aproximaciones numéricas de la integral para obtener un tercer valor más exacto.

- Esas dos estimaciones o aproximaciones se obtienen de aplicar la regla del trapecio

	$O(h^2)$				…
$n = 1$	$I_{1,1}$				
$n = 2$	$I_{2,1}$				
…					

Integración de Romberg

- Técnica recursiva … **combina** dos estimaciones/aproximaciones numéricas de la integral para obtener un tercer valor más exacto.

- Esas dos estimaciones o aproximaciones se obtienen de aplicar la regla del trapecio

	$O(h^2)$	$O(h^4)$			…
$n = 1$	$I_{1,1}$	$I_{1,2}$			
$n = 2$	$I_{2,1}$				
…					

Integración de Romberg

- Técnica recursiva … **combina** dos estimaciones/aproximaciones numéricas de la integral para obtener un tercer valor más exacto.

- Esas dos estimaciones o aproximaciones se obtienen de aplicar la regla del trapecio

	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$		…
$n = 1$	$I_{1,1}$	$I_{1,2}$			
$n = 2$	$I_{2,1}$				
…					

Integración de Romberg

- Técnica recursiva … **combina** dos estimaciones/aproximaciones numéricas de la integral para obtener un tercer valor más exacto.

- Esas dos estimaciones o aproximaciones se obtienen de aplicar la regla del trapecio

	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$		…
$n = 1$	$I_{1,1}$	$I_{1,2}$			
$n = 2$	$I_{2,1}$				
$n = 4$	$I_{3,1}$				
…					

Integración de Romberg

- Técnica recursiva … **combina** dos estimaciones/aproximaciones numéricas de la integral para obtener un tercer valor más exacto.

- Esas dos estimaciones o aproximaciones se obtienen de aplicar la regla del trapecio

	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$		…
$n = 1$	$I_{1,1}$	$I_{1,2}$			
$n = 2$	$I_{2,1}$				
$n = 4$	$I_{3,1}$	$I_{2,2}$			
…					

Integración de Romberg

- Técnica recursiva … **combina** dos estimaciones/aproximaciones numéricas de la integral para obtener un tercer valor más exacto.

- Esas dos estimaciones o aproximaciones se obtienen de aplicar la regla del trapecio

	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$		…
$n = 1$	$I_{1,1}$	$I_{1,2}$	$I_{1,3}$		
$n = 2$	$I_{2,1}$				
$n = 4$	$I_{3,1}$	$I_{2,2}$			
…					

Integración de Romberg

- Técnica recursiva … **combina** dos estimaciones/aproximaciones numéricas de la integral para obtener un tercer valor más exacto.

- Esas dos estimaciones o aproximaciones se obtienen de aplicar la regla del trapecio

	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$	…
$n = 1$	$I_{1,1}$	$I_{1,2}$	$I_{1,3}$		
$n = 2$	$I_{2,1}$				
$n = 4$	$I_{3,1}$	$I_{2,2}$			
…					

Integración de Romberg

- Técnica recursiva … **combina** dos estimaciones/aproximaciones numéricas de la integral para obtener un tercer valor más exacto.

- Esas dos estimaciones o aproximaciones se obtienen de aplicar la regla del trapecio

	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$	…
$n = 1$	$I_{1,1}$	$I_{1,2}$	$I_{1,3}$		
$n = 2$	$I_{2,1}$				
$n = 4$	$I_{3,1}$	$I_{2,2}$			
$n = 8$	$I_{4,1}$				
…					

Integración de Romberg

- ❑ Técnica recursiva … **combina** dos estimaciones/aproximaciones numéricas de la integral para obtener un tercer valor más exacto.

- ❑ Esas dos estimaciones o aproximaciones se obtienen de aplicar la regla del trapecio

	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$	…
$n = 1$	$I_{1,1}$	$I_{1,2}$	$I_{1,3}$		
$n = 2$	$I_{2,1}$				
$n = 4$	$I_{3,1}$	$I_{2,2}$			
$n = 8$	$I_{4,1}$	$I_{3,2}$			
…					

Integración de Romberg

- Técnica recursiva … **combina** dos estimaciones/aproximaciones numéricas de la integral para obtener un tercer valor más exacto.

- Esas dos estimaciones o aproximaciones se obtienen de aplicar la regla del trapecio

	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$	…
$n = 1$	$I_{1,1}$	$I_{1,2}$	$I_{1,3}$		
$n = 2$	$I_{2,1}$				
$n = 4$	$I_{3,1}$	$I_{2,2}$			
$n = 8$	$I_{4,1}$	$I_{3,2}$	$I_{2,3}$		
…					

Integración de Romberg

- Técnica recursiva … **combina** dos estimaciones/aproximaciones numéricas de la integral para obtener un tercer valor más exacto.

- Esas dos estimaciones o aproximaciones se obtienen de aplicar la regla del trapecio

	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$	…
$n = 1$	$I_{1,1}$	$I_{1,2}$	$I_{1,3}$	$I_{1,4}$	
$n = 2$	$I_{2,1}$				
$n = 4$	$I_{3,1}$	$I_{2,2}$			
$n = 8$	$I_{4,1}$	$I_{3,2}$	$I_{2,3}$		
…					

¿Cuál es el criterio de terminación de las iteraciones?

Integración de Romberg

- Técnica recursiva … **combina** dos estimaciones/aproximaciones numéricas de la integral para obtener un tercer valor más exacto.

- Esas dos estimaciones o aproximaciones se obtienen de aplicar la regla del trapecio

	O(h²)	O(h⁴)	O(h⁶)	O(h⁸)	…
n = 1	$I_{1,1}$	$I_{1,2}$	$I_{1,3}$		
n = 2	$I_{2,1}$				
n = 4	$I_{3,1}$	$I_{2,2}$		$I_{1,4}$	
n = 8	$I_{4,1}$	$I_{3,2}$	$I_{2,3}$		
…					

*Las **columnas k**, indican el nivel de la integración*

*Las **filas j** indican integrales considerando c/vez con mas segmentos*

¿Cuál es el criterio de terminación de las iteraciones?

Estimación del error relativo porcentual:

$$|\varepsilon_a| = \left|\frac{I_{j,k} - I_{j,k-1}}{I_{j,k}}\right| 100\%$$

Integración de Romberg

- Técnica recursiva … **combina** dos estimaciones/aproximaciones numéricas de la integral para obtener un tercer valor más exacto.
- Esas dos estimaciones o aproximaciones se obtienen de aplicar la regla del trapecio

	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$	…
$n = 1$	$I_{1,1}$	$I_{1,2}$			
$n = 2$	$I_{2,1}$		$I_{1,3}$		
$n = 4$	$I_{3,1}$	$I_{2,2}$		$I_{1,4}$	
$n = 8$	$I_{4,1}$	$I_{3,2}$	$I_{2,3}$		
…					

*Las **columnas k**, indican el nivel de la integración*

*Las **filas j** indican integrales considerando c/vez con mas segmentos*

¿Cómo combinamos dos estimaciones?

Forma general de la Integración de Romberg:

$$I_{j,k} \cong \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

Integración de Romberg

- Técnica recursiva … **combina** dos estimaciones/aproximaciones numéricas de la integral para obtener un tercer valor más exacto.

- Esas dos estimaciones o aproximaciones se obtienen de aplicar la regla del trapecio

*Las **columnas k**, indican el nivel de la integración*

*Las **filas j** indican integrales considerando c/vez con mas segmentos*

¿Cómo combinamos dos estimaciones?

Forma general de la Integración de Romberg:

$$I_{j,k} \cong \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

¿Cómo combinamos dos estimaciones?

Forma general de la Integración de Romberg:

$$I_{j,k} \cong \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

CASO ESPECIAL:
dividiendo a la mitad sucesivamente

Aproximación de la integral con O(h^4) $I \cong \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1)$

Aproximación de la integral con O(h^6) $I \cong \frac{16}{15} I_m - \frac{1}{15} I_l$

Aproximación de la integral con O(h^8) $I \cong \frac{64}{63} I_m - \frac{1}{63} I_l$

Los coeficientes suman 1

Representan factores de ponderación que, conforme aumenta la exactitud, ***dan un peso relativamente mayor a la mejor estimación*** de la integral.

EJEMPLO

Mejorar la estimación de la integral de la siguiente función entre 0 y 0.8 utilizando los resultados de estimaciones simples y múltiples de la regla del trapecio:

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

Segmentos	$O(h^2)$
1	0.172800
2	1.068800

•Si se combinan las estimaciones con 1 y 2 segmentos resulta:

$$I \cong \frac{4}{3}(1.0688) - \frac{1}{3}(0.1728) = 1.367467$$

Segmentos	$O(h^2)$	$O(h^4)$
1	0.172800	1.367467
2	1.068800	

Integración de Romberg

EJEMPLO

Mejorar la estimación de la integral de la siguiente función entre 0 y 0.8 utilizando los resultados de estimaciones simples y múltiples de la regla del trapecio:

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

- Si se combinan las estimaciones con 1 y 2 segmentos resulta:

$$I \cong \frac{4}{3}(1.0688) - \frac{1}{3}(0.1728) = 1.367467$$

- También podemos utilizar las estimaciones con 2 y 4 segmentos para obtener:

$$I \cong \frac{4}{3}(1.4848) - \frac{1}{3}(1.0688) = 1.623467$$

Segmentos	Integral	$O(h^4)$
1	0.1728	1.367467
2	1.0688	
4	1.4848	

Integración de Romberg

EJEMPLO

Mejorar la estimación de la integral de la siguiente función entre 0 y 0.8 utilizando los resultados de estimaciones simples y múltiples de la regla del trapecio:

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

- Si se combinan las estimaciones con 1 y 2 segmentos resulta:

$$I \cong \frac{4}{3}(1.0688) - \frac{1}{3}(0.1728) = 1.367467$$

- También podemos utilizar las estimaciones con 2 y 4 segmentos para obtener:

$$I \cong \frac{4}{3}(1.4848) - \frac{1}{3}(1.0688) = 1.623467$$

Segmentos	Integral	$O(h^4)$
1	0.1728	1.367467
2	1.0688	1.623467
4	1.4848	

EJEMPLO

Mejorar la estimación de la integral de la siguiente función entre 0 y 0.8 utilizando los resultados de dos estimaciones de la integral O(h^4):

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$I \cong \frac{4}{3}(1.0688) - \frac{1}{3}(0.1728) = 1.367467$$

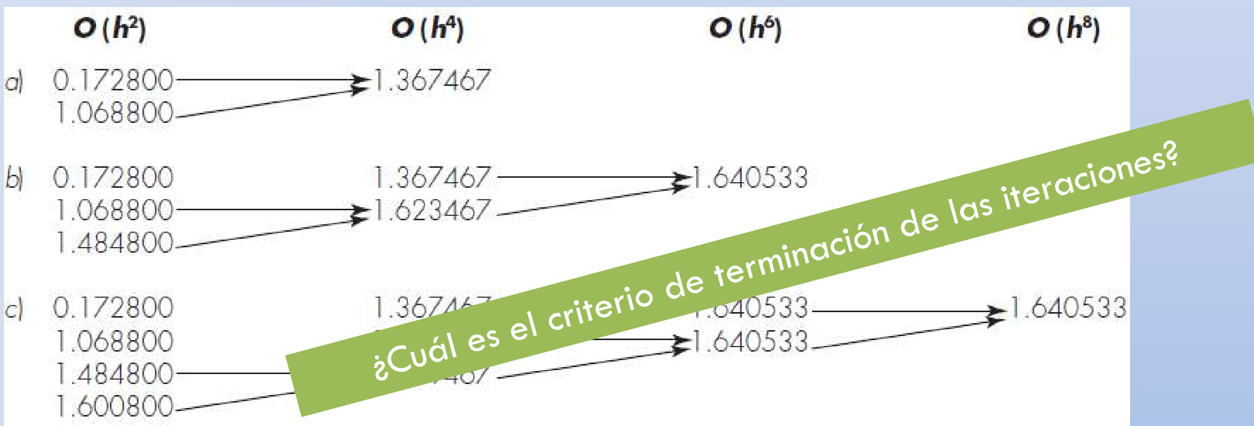
$$I \cong \frac{4}{3}(1.4848) - \frac{1}{3}(1.0688) = 1.623467$$

Combinan las estimaciones O(h^4) y calcular una integral O(h^6) :

$$I = \frac{16}{15}(1.623467) - \frac{1}{15}(1.367467) = 1.640533$$

EJEMPLO

Proceso iterativo de aproximación:



Estimación del error relativo porcentual:

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{I_{j,k} - I_{j,k-1}}{I_{j,k}} \right| 100\%$$

Métodos de aproximación numérica

¿Problemática?

Necesitamos integrar una función continua complicada o una función tabulada donde los valores de x y $f(x)$ *están dados como un conjunto discreto* de puntos.

Usamos métodos de integración numéricos para obtener la integral aproximada

- Formas cerradas de las fórmulas de integración de Newton-Cotes
  - Regla del trapecio
  - Regla de Simpson 1/3
  - Regla de Simpson 3/8
- Integración de Romberg

Formas cerradas de las fórmulas de integración de Newton-Cotes

Comentarios finales

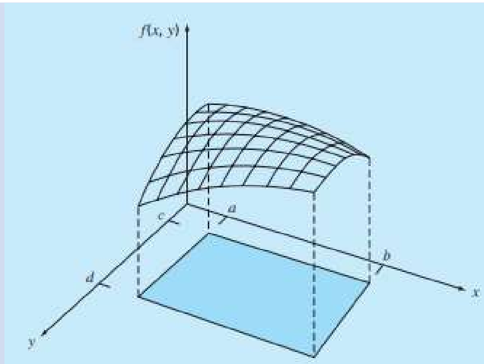
- La integración de Romberg es más eficientes que las reglas del trapecio y de Simpson.

- La reglas de Simpson, las integración de Romberg y la cuadratura de Gauss son más eficientes y exactas que la regla del trapecio.

- Para la regla del Trapecio y las de Simpson, de aplicación múltiple, conforme número de segmentos aumenta (n) disminuye el error. Pero también, para grandes valores de n, el error vuelve a aumentar debido a que los errores de redondeo comienzan a dominar.

Comentario para el caso de integrales múltiples (dobles o triples…)

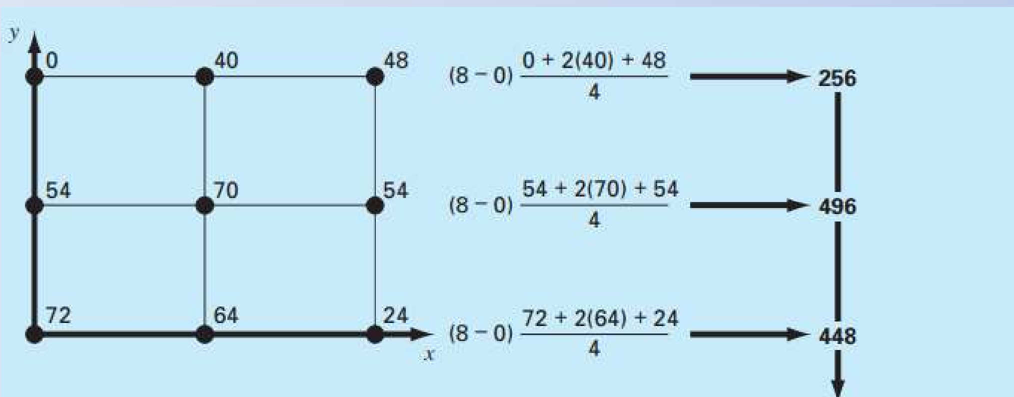
EJEMPLO



$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

se pueden calcular como integrales iteradas

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx$$



Ejemplo aplicando la regla del trapecio con dos segmentos

1° saplican métodos a la primera dimensión manteniendo constantes los valores de la segunda dimensión.

2° se aplica e el método para integrar la segunda dimensión.