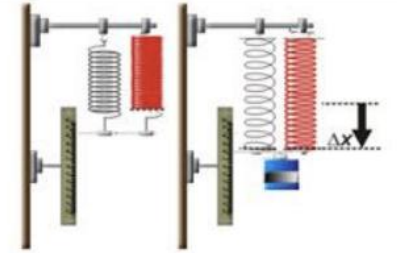




Problema: Sistema masa-resorte

Definición del problema



Se quiere caracterizar un sistema de una masa con dos resortes. Las fuerzas [N] actuantes se miden con un dinamómetro de 4 cifras significativas de precisión. Los desplazamientos [m] se midieron con una regla común. El sistema de ecuaciones queda determinado por:

$$\begin{cases} 18.55k_0 + 5.86k_1 = 150.9 \\ 204.88k_0 + 104.31k_1 = 2000.0 \end{cases}$$



Sistemas de ecuaciones lineales compatibles

Recordemos...

Fases en la resolución de un problema

1. Definición del problema
 2. Análisis del problema
 3. Diseño del algoritmo
 4. Prueba del algoritmo
 5. Codificación del algoritmo en un lenguaje
 6. Prueba y puesta a punto del programa
 7. Documentación del programa
- Groupings:
- 1. Definición del problema and 2. Análisis del problema: *Análisis de Requerimientos:*
¿**Qué** es lo que hay que hacer?
 - 3. Diseño del algoritmo and 4. Prueba del algoritmo: *Diseño:*
¿**Cómo** hacer lo especificado en la etapa de Análisis?
 - 5. Codificación del algoritmo en un lenguaje, 6. Prueba y puesta a punto del programa, and 7. Documentación del programa: **Programa**
 - 3. Diseño del algoritmo, 4. Prueba del algoritmo, 5. Codificación del algoritmo en un lenguaje, 6. Prueba y puesta a punto del programa, and 7. Documentación del programa: **DE + Algoritmo**





Problema: Sistema masa-resorte

Análisis del problema

- Objetivo, los resultados y valores que se debe obtener.(Datos de salida)
- Reconocer los datos y valores de los que dispone.(Dato de entrada)
- Análisis gráfico.
- Descripción general con tus palabras de como se resuelve.

Problema: Sistema masa-resorte

Análisis del problema

Objetivo: caracterizar el sistema masa resorte hallando los valores de k_0 y k_1 .

Datos de salida: k_0 , k_1 y error .

Datos y valores de los que dispone:
$$\begin{cases} 18.55k_0 + 5.86k_1 = 150.9 \\ 204.88k_0 + 104.31k_1 = 2000.0 \end{cases}$$

¿Cuál es el problema?

Debemos obtener los valores de k_0 y k_1 que satisfacen cada una de las ecuaciones.



Resolver un Sistema de ecuaciones

Problema: Sistema masa-resorte

Análisis del problema

Análisis del TIPO de sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 18.55k_0 + 5.86k_1 = 150.9 \\ 204.88k_0 + 104.31k_1 = 2000.0 \end{cases}$$

Analizamos de qué tipo es este sistema?

- es lineal? (La forma es lineal, lo comprobamos gráficamente)
- tiene solución? (Teorema Rouché-Frobenius)

Problema: Sistema masa-resorte

Análisis del problema

Teorema Rouché-Frobenius:

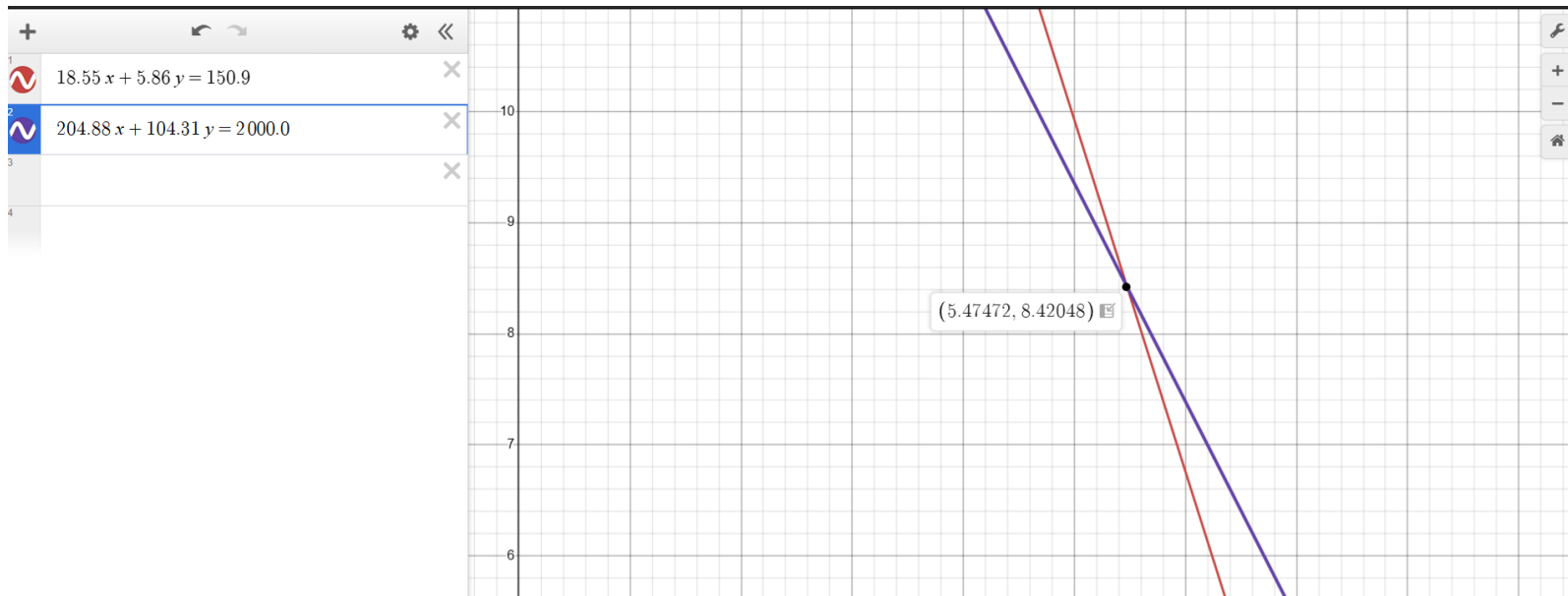
Menciona que si el rango de la matriz de coeficientes (M_c) = rango de la matriz ampliada (M_a) = número de incógnitas (N_i), entonces el sistema es compatible determinado, es decir existe una única solución, que gráficamente significa que existe un punto en el que se cruzan las rectas.

$$\begin{aligned} M_c &= M_a = N_i \\ 2 &= 2 = 2 \end{aligned}$$



Análisis del problema

Análisis gráfico





Problema: Sistema masa-resorte

Análisis del problema

Descripción general con tus palabras de como se resuelve.

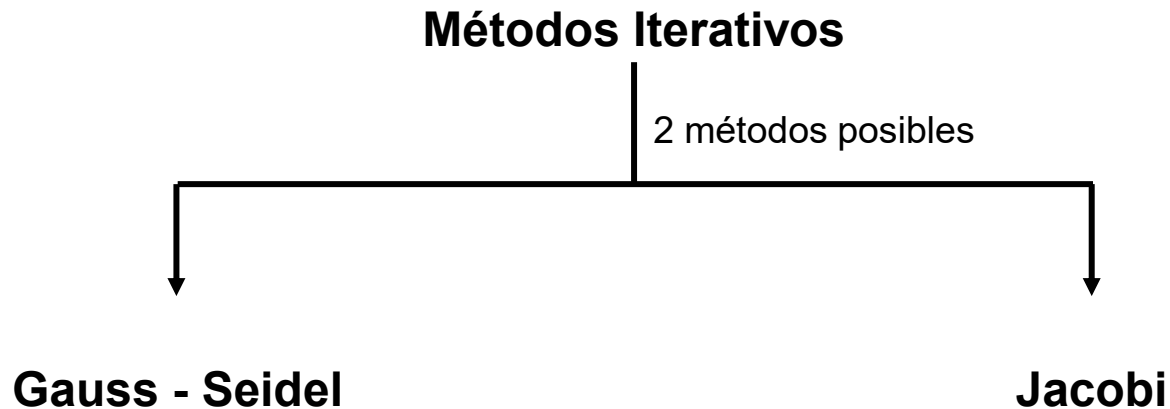
Resolver el sistema de ecuaciones lineales compatible determinado aplicando un método numérico (Gauss Seidel o Jacobi) para poder obtener los valores de k_0 y k_1 que satisfacen cada una de las ecuaciones del sistema y que gráficamente implica determinar el punto de (k_0, k_1) donde se intersecan ambas curvas.



Problema: Sistema masa-resorte

Análisis del problema

Métodos Iterativos para resolver grandes Sistemas de ecuaciones lineales Compatibles





Problema: Sistema masa-resorte

Análisis del problema

Jacobi

Cicla encontrando en cada iteración una solución aproximada a la solución del sistema (para esto usa en cada iteración todos los valores de las incógnitas calculados en la anterior iteración) hasta que se converja y obtener una solución aproximada a la verdadera que cumpla con la tolerancia de error previamente especificada.

Gauss - Seidel

Gauss-Seidel a diferencia de Jacobi usa los valores de las incógnitas más recientemente obtenidos para calcular los de la iteración actual.

Problema: Sistema masa-resorte

Análisis del problema

CONSIDERAR QUE:

Los sistemas de ecuaciones tienden a estar **mal condicionados**.

Los sistemas mal condicionados son sensibles a los errores de redondeo.



Para reducir los errores de redondeo **escalamos** el sistema o su representación matricial.

Problema: Sistema masa-resorte

RECORDAR: representación matricial

$$A * k = c$$

A = matriz coeficientes

k = arreglo incógnitas

C = arreglo constantes

En forma matricial para un sistema de 2 ecuaciones por 2 incógnitas:

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

A = Matriz Coeficientes; k = Arreglo Incógnitas; C = Arreglo constantes

$$\begin{bmatrix} 18.55 & 5.86 \\ 204.88 & 104.31 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150.9 \\ 2000.0 \end{bmatrix}$$

Problema: Sistema masa-resorte

Dividir por el máximo de la fila (escalar fila):

$$\begin{bmatrix} 18.55/\mathbf{18.55} & 5.86/\mathbf{18.55} \\ 204.88/\mathbf{204.88} & 104.31/\mathbf{204.88} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 150.9/\mathbf{18.55} \\ 2000.0/\mathbf{204.88} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.3159 \\ 1 & 0.5091 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.1347 \\ 9.7618 \end{bmatrix}$$



Problema: Sistema masa-resorte

Análisis del problema

¿Es posible aplicar el método numérico?

¿Es posible garantizar convergencia?

¿Cuáles son las ecuaciones iterativas para calcular en cada iteración los nuevos valores de las incógnitas?

¿Hasta cuando se itera al aplicar cualquiera de los dos métodos numéricos?

¿Qué valores iniciales de las incógnitas consideramos?

Problema: Sistema masa-resorte

Análisis del problema

¿Es posible aplicar el método numérico?

Condiciones de aplicabilidad: Debo poder despejar una incógnita de cada ecuación, es decir no debe haber ceros en la diagonal. Si hay ceros pivotemos por filas para acomodar la matriz.



Si hay ceros entonces tratamos de solucionar con pivoteo de filas para que no queden ceros en la diagonal.



Problema: Sistema masa-resorte

Análisis del problema

¿Es posible garantizar convergencia?

Condiciones de convergencia: La matriz debe ser diagonal dominante para asegurar que el método converge. Sino puede o no converger.

Diagonal dominante = el valor del elemento de la diagonal (pivote) debe ser mayor en valor absoluto que la suma en valor absoluto de todos los elemento de su fila.

Condición de convergencia:

Los métodos Gauss-Seidel y Jacobi garantizan convergencia si la matriz es diagonal dominante.



Problema: Sistema masa-resorte

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.3159 \\ 1 & 0.5091 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.1347 \\ 9.7618 \end{bmatrix}$$

Aunque pivoteamos no podemos llegar a una matriz diagonal dominante. Entonces no se puede garantizar convergencia.

En estos casos probamos, para obtener las ecuaciones iterativas probamos:

si converge despejando de una forma y sino despejamos de otra forma y volvemos a probar si converge.

Problema: Sistema masa-resorte

Análisis del problema

¿Cuáles son las ecuaciones iterativas?

Las ecuaciones iterativas surgen de despejar cada incógnita de alguna de las ecuaciones del sistema.

Problema: Sistema masa-resorte

Análisis del problema

¿Hasta cuando se itera?

$$\varepsilon_{a,i} = \frac{\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i-1)}\|}{\|\mathbf{x}^{(i)}\|} 100\% < \varepsilon_s$$

i : iteración actual.

$i-1$: iteración anterior.

$\|\mathbf{x}^{(i)}\|$: norma 2 o Euclidea del vector x en iteración actual i .

$\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i-1)}\|$: norma 2 o Euclidea de la diferencia entre los vectores aproximados en las iteraciones actual y anterior.



Problema: Sistema masa-resorte

Análisis del problema

Cota de error

Cifras significativas: El enunciado especifica que se requieren 4 cifras significativas, por lo tanto:

$$\epsilon_s = 0,5 \times 10^{2-4} = 0.5 \times 10^{-2}$$

$$\epsilon_s = 0.005$$



Problema: Sistema masa-resorte

Análisis del problema

¿Qué valores iniciales de las incógnitas consideramos?

Si es posible, observamos gráficamente valores cercanos a los buscados. Por defecto, se parte de cero como valor inicial para todas las incógnitas, entonces $k_0=0$ y $k_1=0$.



Problema: Sistema masa-resorte

Análisis del problema

Datos de entrada?

Datos del sistema de ecuaciones

Cota de error

Datos de salida?

Variables incógnitas

Iteraciones

Error

Proceso?

Método JACOBI o Gauss Seidel



Problema: Sistema masa-resorte

ACLARACIÓN SOBRE LA RESOLUCIÓN DE ESTE EJERCICIO

Estos métodos numéricos se utilizan generalmente para matrices grandes y donde la mayoría de sus elementos son ceros, de esta forma no se almacena en memoria toda la matriz sino sólo los coeficientes involucrados en las ecuaciones iterativas.

Por ello, no se deberían guardar los coeficientes en una estructura de matriz.

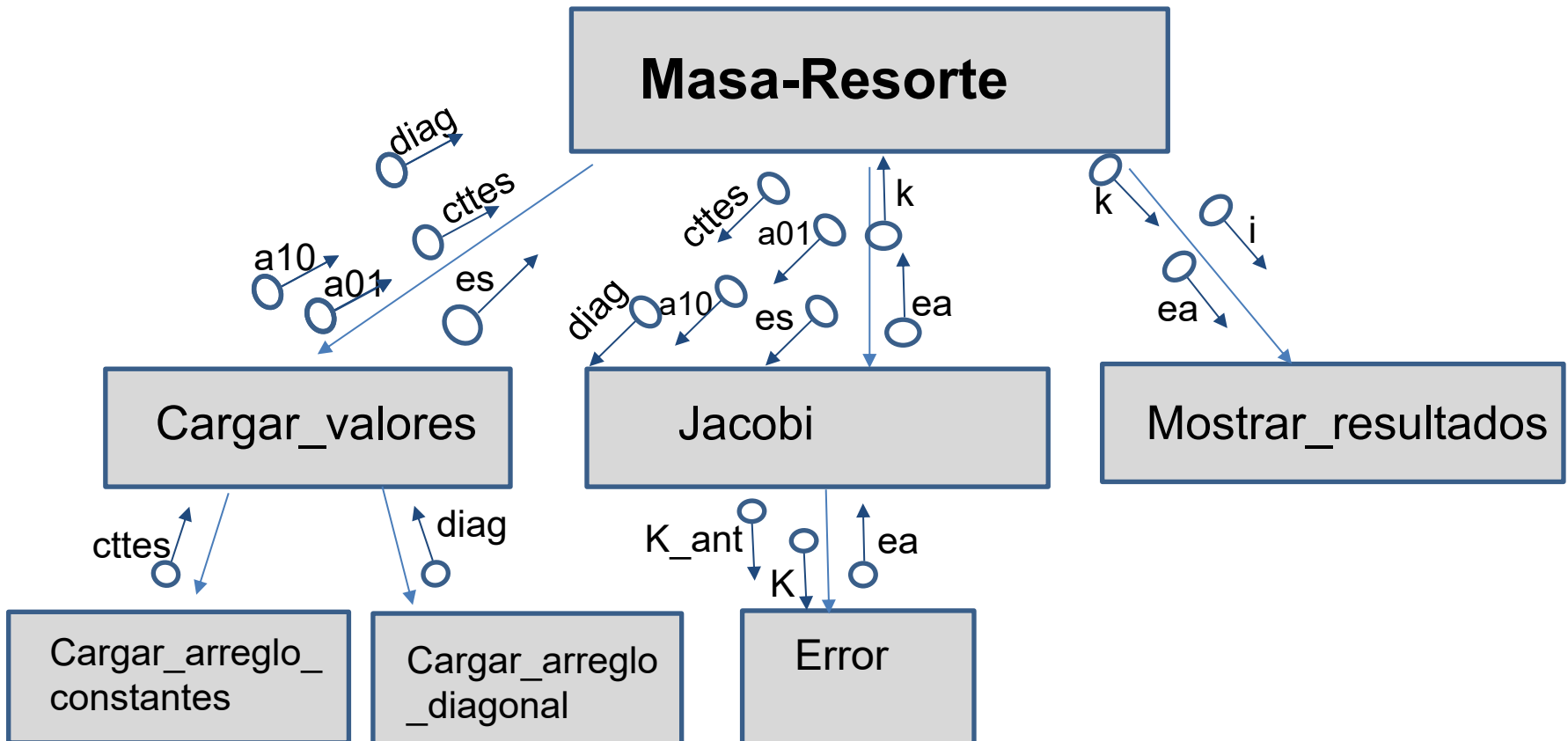
Este ejemplo es muy simple para que se entienda, pero es por lo mencionado antes que no se utiliza una estructura de matriz para los coeficientes sino variables para cada uno.



Problema: Sistema masa-resorte

Diagrama de Estructuras-Jacobi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.3159 \\ 1 & 0.5091 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.1347 \\ 9.7618 \end{bmatrix}$$





Problema: Sistema masa-resorte

Algoritmo - Jacobi

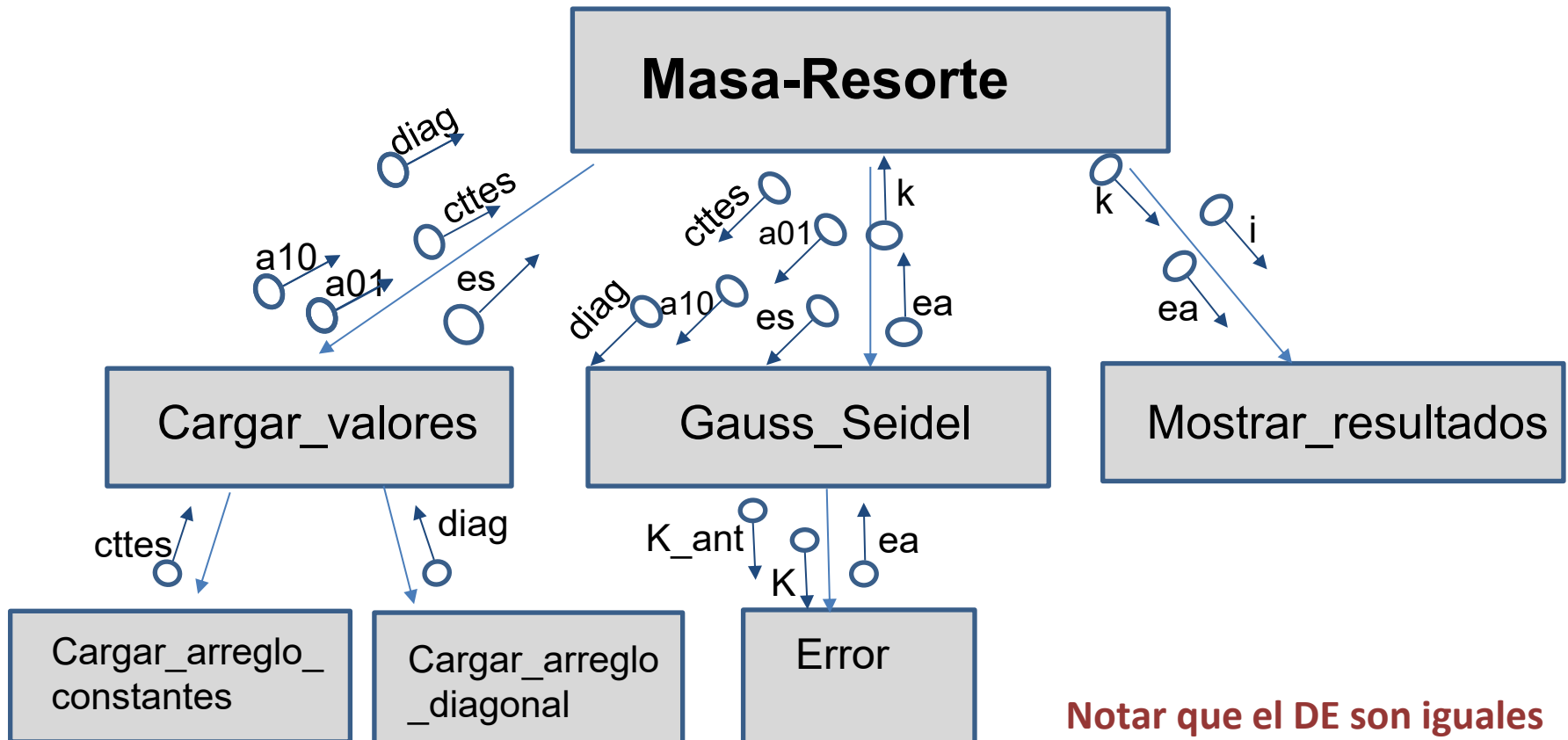
```
Jacobi(a01,a11,cttes,diag,es)
    kant = [0,0] #inicializar arreglo de incognitas en cero
    ea=es + 1
    i = 0
    Mientras es<= ea
        k[0]= ( cttes[0] – a01 * kant[1] )/diag[0]
        k[1]= ( cttes[1] – a10 * kant[0] )/ diag[1]
        i=i+1
        Si i>=2
            ea= Error(kant, k)
            kant[0]= k[0]
            kant[1]= k[1]
    retornar k, i, ea
```



Problema: Sistema masa-resorte

Diagrama de Estructuras-Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.3159 \\ 1 & 0.5091 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.1347 \\ 9.7618 \end{bmatrix}$$



Notar que el DE son iguales entre Jacobi y Gauss-Seidel



Problema: Sistema masa-resorte

Algoritmo – Gauss-Seidel

```
Gauss_Seidel(a01,a11,cttes,diag,es)
    kant = [0,0] #inicializar arreglo de incognitas en cero
    ea=es + 1
    i = 0
    Mientras es<= ea
        k[0]= ( cttes[0] – a01 * kant[1] )/ diag[0]
        k[1]= ( cttes[1] – a10 * k[0])/ diag[1]
        i=i+1
        Si i>=2
            ea= Error(kant, k)
            kant[0]= k[0]
            kant[1]= k[1]
    retornar k, i, ea
```

Modificación!



Problema: Sistema masa-resorte

Algoritmo – Error

Error(kant, k)

retornar $((k[0]-kant[0])^2 + (k[1]-kant[1])^2)^{1/2} / ((k[0])^2 + (k[1])^2)^{1/2} * 100$



Principal MasaResorte

Para Jacobi

```
a01,a10,diag,cttes,es,lambd = Cargar_valores()
k,i,ea = Jacobi(a01,a10,diag,cttes,es,lambd)
print ('Contante k1: ' + str(k[0]))
print ('Contante k2: ' + str(k[1]))
print ('Iteraciones: ' + str(i))
print('Error: ' + str(ea))
```

Para Gauss_Seidel

```
a01,a10,diag,cttes,es,lambd = Cargar_valores()
k,i,ea= Gauss_Seidel(a01,a10,diag,cttes,es,lambd)
print ('Contante k1: ' + str(k[0]))
print ('Contante k2: ' + str(k[1]))
print ('Iteraciones: ' + str(i))
print('Error: ' + str(ea))
```



Función Cargar_Valores

```
def Cargar_valores():  
    #Cargar los elementos de la diagonal de la matriz de coeficientes. Diferentes de cero.  
    diag = cargar_arreglo_diagonal()  
    #Carga los coeficientes diferentes de cero de la matriz de coeficientes  
    a01 = float(input('Ingrese el coeficiente a01: '))  
    a10 = float(input('Ingrese el coeficiente a10: '))  
    #Cargar los elementos del vector constante.  
    cttes = cargar_arreglo_constantes()  
    #Pedir la cota de error al usuario.  
    es = float(input('Ingrese la cota de error: '))  
    #Pedir el factor de relajación al usuario.  
    lambd=float(input('Ingrese el factor de relajación: '))  
  
    return a01,a10,diag,cttes,es,lambd
```

Codificación del algoritmo en un lenguaje



Función Cargar_arreglo_constantes

y

Función Cargar_arreglo_diagonales

```
def cargar_arreglo_constantes():  
    c = [0,0]  
    for i in range(len(c)):  
        c[i] = float(input('Ingrese la constante c' + str(i+1)))  
    return c  
  
def cargar_arreglo_diagonal():  
    d = [0,0]  
    for i in range(len(d)):  
        d[i] = float(input('Ingrese el valor del elemento diagonal de la matriz de coeficientes d' + str(i+1)))  
    return d
```

Codificación del algoritmo en un lenguaje

Función Error

```
22 def error(k1, k1_ant, k2, k2_ant):  
23     return m.sqrt(m.pow(k1-k1_ant,2) + m.pow(k2-k2_ant,2)) / m.sqrt(m.pow(k1,2)+m.pow(k2,2))*100
```



Función Jacobi

```
def Jacobi(a01,a10,diag,cttes,es,lambd):  
    kant = [0, 0]  
    k=[0, 0]  
    i = 0  
    ea=es + 1  
    while (es <= ea):  
        k[0]= (cttes[0]-a01* kant[1])/diag[0]  
        k[0]= lambd*k[0] + (1-lambd)*kant[0]  
        k[1]= (cttes[1]-a10* kant[0])/diag[1]  
        k[1]= lambd*k[1] + (1-lambd)*kant[1]  
        i+=1  
        if (i >= 2):  
            ea = Error(kant,k)  
        kant[0]=k[0]  
        kant[1]=k[1]  
    return k,i,ea
```



Función Gauss-Seidel

```
def Gauss_Seidel(a01,a10,diag,cttes,es,lambd):  
    kant = [0, 0]  
    k=[0, 0]  
    i = 0  
    ea=es + 1  
    while (es <= ea):  
        k[0]= (cttes[0]-a01* kant[1])/diag[0]  
        k[0]= lambd*k[0] + (1-lambd)*kant[0]  
        k[1]= (cttes[1]-a10* k[0])/diag[1]  
        k[1]= lambd*k[1] + (1-lambd)*kant[1]  
        i+=1  
        if (i >= 2):  
            ea = Error(kant,k)  
            kant[0]=k[0]  
            kant[1]=k[1]  
    return k,i,ea
```



Problema: Sistema masa-resorte

Resultados matemáticos

Se ejecuto en base a un error: **0.005** y un factor de relajación: 1

Jacobi	Gauss-Seidel
Contante k1: 5.474146259806199 Contante k2: 8.421698578865882 Iteraciones: 46 Error: 0.004690212521054667	Contante k1: 5.474546908544341 Contante k2: 8.421239621794653 Iteraciones: 20 Error: 0.004120215780040354

Prueben considerando un error: **0.005** y un factor de relajación diferente.

Prueben también intercambiando las filas y considerando un error: **0.005** y un factor de relajación 1 y con un factor de relajación diferente.



Problema: Sistema masa-resorte

Resultados contextualizados

Para finalizar, recordar mostrar los resultados en forma contextualizada de acuerdo a la definición y análisis del problema.

Se ejecuto en base a un error: **0.005** y un factor de relajación: 1. Aplicando el método de Gauss-Seidel.

Contante k_1 : 5.475 N/m

Contante k_2 : 8.421 N/m

Iteraciones: 20

Error: 0.004120%

Validación/verificación de los resultados

VERIFIQUEN LOS VALORES REEMPLAZANDO EN LAS ECUACIONES LOS VALORES DE LAS CONSTANTES OBTENIDAS.

ADEMÁS verifiquen gráficamente.