MÉTODO DE PSEUDOINVERSA O REGRESIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS

FUNDAMENTOS DE PROGRAMACIÓN Y MÉTODOS NUMÉRICOS

FACULTAD DE INGENIERÍA .UNICEN

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

PROBLEMA: Viscosidad del agua

Un grupo de ingenieros analiza cómo la viscosidad cinemática del agua, μ (cm^2=s), está relacionada con la temperatura. Los datos obtenidos de viscosidad en un laboratorio para diferentes temperaturas son:

$T(°C)$	4	8	12	16	18	24
$\mu(cm^2/s)$	1,5676	1,3874	1,2396	1,1168	1,0105	0,9186

Algunos de los integrantes del equipo plantean un modelo lineal y otros un modelo polinómico de grado dos para ajustar a los datos expresados en la tabla. Averigua:

a. ¿cuál es el modelo que mejor ajusta a los datos experimentales?
b. Algunos de los ingenieros basados en las características del experimento y estudios teóricos y empíricos anteriores, sostienen que el modelo al que deberían ajustar mejor los datos debe ser al modelo lineal. ¿Reflexiona y especifica a qué conclusiones llegas en este caso? ¿y en el caso de que el comportamiento de los datos pudiera responder a cualquiera de los dos modelos?

ANÁLISIS DEL PROBLEMA

¿Cuál es el objetivo?

Determinar que modelo ajusta mejor los datos de la viscosidad en función de la temperatura

ANÁLISIS DEL PROBLEMA

¿Qué datos hay disponibles, cuáles son los resultados que deseo obtener?

¿de qué datos e información se dispone?

PROCESO

¿Qué se espera como salida?

Mediciones->datos con error:

$T(°C)$	4	8	12	16	18	24
$\mu(cm^2/s)$	1,5676	1,3874	1,2396	1,1168	1,0105	0,9186

Los datos ajustan a un modelo….con una calidad de …

lineal o polinómico

ANÁLISIS DEL PROBLEMA

¿De qué tipo de problema se trata?¿cuál es el **proceso**?¿qué método o métodos son posibles de aplicar?

Problemática de ajuste de curvas

Método de pseudoinversa o de mínimos cuadrados

ANÁLISIS DEL PROBLEMA

Problemática de ajuste de curvas

Mediciones->datos con error:

$T(°C)$	4	8	12	16	18	24
$\mu(cm^2/s)$	1,5676	1,3874	1,2396	1,1168	1,0105	0,9186

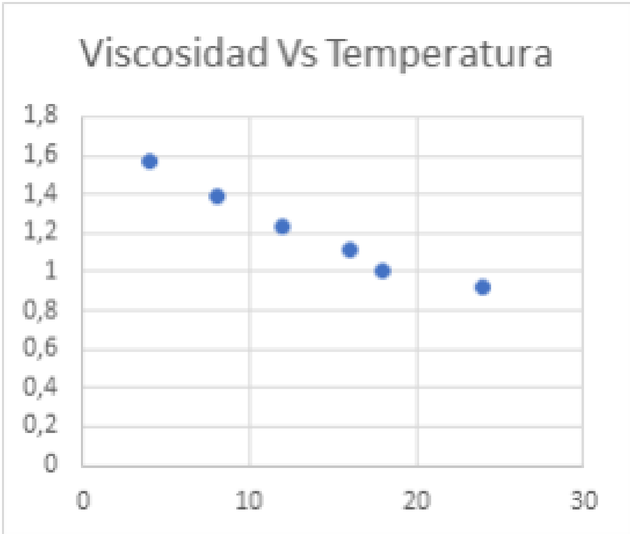
lineal o polinómico

PROCESO

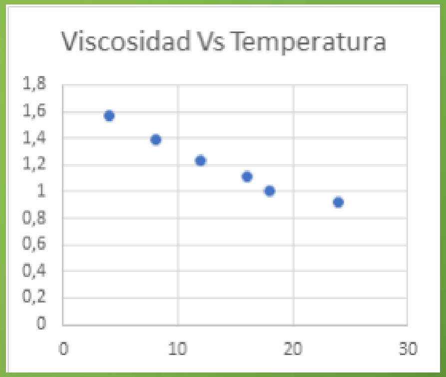
Estrategia: Aplicar 2 veces el método de pseudoinversa o de mínimos cuadrados y calcular en cada caso el R^2.

Los datos ajustan a un modelo….con una calidad de …

Análisis de los datos:



DISEÑO DE LA SOLUCION



$T(°C)$	4	8	12	16	18	24
$\mu(cm^2/s)$	1,5676	1,3874	1,2396	1,1168	1,0105	0,9186

Modelo lineal: $u = a*T + b$

Entonces:

$$1{,}5676 = a\,(4) + b$$
$$1{,}3874 = a\,(8) + b$$
$$1{,}2396 = a\,(12) + b$$
$$1{,}1168 = a\,(16) + b$$
$$1{,}0105 = a\,(18) + b$$
$$0{,}9186 = a\,(24) + b$$

Modelo polinómico 2do grado: $u = a*T^2 + b*T + c$

Entonces:

$$1{,}5676 = a\,(4)^2 + b\,(4) + c$$
$$1{,}3874 = a\,(8)^2 + b\,(8) + c$$
$$1{,}2396 = a\,(12)^2 + b\,(12) + c$$
$$1{,}1168 = a\,(16)^2 + b\,(16) + c$$
$$1{,}0105 = a\,(18)^2 + b\,(18) + c$$
$$0.9186 = a\,(24)^2 + b\,(24) + c$$

-→La resolución matemática de este problema involucra resolver un sistema de **ecuaciones lineales Incompatible** para poder conocer a y b del modelo lineal ó a, b y c del polinomio de segundo grado.-→ Método de pseudoinversa o de mínimos cuadrados

DISEÑO DE LA SOLUCION

Estrategia: Aplicar 2 veces el método de pseudoinversa o de mínimos cuadrados y calcular en cada caso el R^2

Modelo lineal: u= a*T + b

Entonces:

$$1{,}5676 = a\ (4) + b$$
$$1{,}3874 = a\ (8) + b$$
$$1{,}2396 = a\ (12) + b$$
$$1{,}1168 = a\ (16) + b$$
$$1{,}0105 = a\ (18) + b$$
$$0.9186 = a\ (24) + b$$

1. Calcular las incógnitas a y b, aplicando el método:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 1 \\ 12 & 1 \\ 16 & 1 \\ 18 & 1 \\ 24 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5676 \\ 1{,}3874 \\ 1{,}2396 \\ 1{,}1168 \\ 1{,}0105 \\ 0{,}9186 \end{pmatrix}$$

$$A \quad * \quad X \quad = \quad B$$

Y aplicamos el método para obtener $X = (A^T * A)^{-1} * A^T * B$

2. Calcular el R^2 :

DISEÑO DE LA SOLUCION

Estrategia: Aplicar 2 veces el método de pseudoinversa o de mínimos cuadrados y calcular en cada caso el R^2

2. Calcular el R^2 :

T_i	U_i	$(U_i - U_{prom})^2$	$(U_i - (a*T + b))^2$
4	1,5676	0,130212723	
8	1,3874	1,92487876	
12	1,2396	1,53660816	
16	1,1168	1,24724224	
18	1,0105	1,02111025	
24	0,9186	0,84382596	
	1,20675	6,703878093	
		S1	S2

Coeficiente de determinación:

$$R^2 = \frac{S_1 - S_2}{S_1}$$

Coeficiente de correlación:

R

DISEÑO DE LA SOLUCION

Estrategia: Aplicar 2 veces el método de pseudoinversa o de mínimos cuadrados y calcular en cada caso el R^2

Modelo polinómico 2do grado: $u = a*T^2 + b*T + c$

Entonces:

$$1{,}5676 = a\,(4)^2 + b\,(4) + c$$
$$1{,}3874 = a\,(8)^2 + b\,(8) + c$$
$$1{,}2396 = a\,(12)^2 + b\,(12) + c$$
$$1{,}1168 = a\,(16)^2 + b\,(16) + c$$
$$1{,}0105 = a\,(18)^2 + b\,(18) + c$$
$$0.9186 = a\,(24)^2 + b\,(24) + c$$

1. Calcular las incógnitas a y b, aplicando el método:

$$\begin{pmatrix} 4^2 & 4 & 1 \\ 8^2 & 8 & 1 \\ 12^2 & 12 & 1 \\ 16^2 & 16 & 1 \\ 18^2 & 18 & 1 \\ 24^2 & 24 & 1 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5676 \\ 1{,}3874 \\ 1{,}2396 \\ 1{,}1168 \\ 1{,}0105 \\ 0{,}9186 \end{pmatrix}$$

$$A \quad * \quad X \quad = \quad B$$

Y aplicamos el método para obtener $X = (A^T * A)^{-1} * A^T * B$

2. Calcular el R^2 :

DISEÑO DE LA SOLUCION

Estrategia: Aplicar 2 veces el método de pseudoinversa o de mínimos cuadrados y calcular en cada caso el R^2.

2. Calcular el R^2 :

T_i	U_i	$(U_i - U_{prom})^2$	$(U_i - (a*T^2 + b*T + c))^2$
4	1,5676	0,130212723	
8	1,3874	1,92487876	
12	1,2396	1,53660816	
16	1,1168	1,24724224	
18	1,0105	1,02111025	
24	0,9186	0,84382596	
	1,20675	6,703878093	
		S1	S2

Coeficiente de determinación:

$$R^2 = \frac{S_1 - S_2}{S_1}$$

Coeficiente de correlación:

R

DISEÑO DE LA SOLUCION

Estrategia: Aplicar 2 veces el método de pseudoinversa o de mínimos cuadrados y calcular en cada caso el R^2.

DIAGRAMA DE ESTRUCTURA

DISEÑO DE LA SOLUCION

Estrategia: Aplicar 2 veces el método de pseudoinversa o de mínimos cuadrados y calcular en cada caso el R^2.

DIAGRAMA DE ESTRUCTURA

DISEÑO DE LA SOLUCION

ALGORITMOS

```
Funcion VISCOSIDAD_DEL_AGUA
   A= CARGAR_MATRIZ
   B= CARGAR_VECTOR
   X = MINIMO_CUADRADOS(A, B)
   S1 =CALCULAR_S1(B)
   S2=0
   Para i=1hasta longitud(B) hacer
              S2=S2+(B[i]-X[0]*A[i]-X[1])^2
   Fin_para
   R2lineal=(S1-S2)/S1

   A= CARGAR_MATRIZ
   X = MINIMO_CUADRADOS(A, B)
   S2=0
   Para i=1hasta longitud(B) hacer
              S2=S2+(B[i]-X[0] *A[i] ^2 -X[1]*A[i]-X[2])^2
   Fin_para
   R2cuadratico=(S1-S2)/S1
   Si R2lineal >R2cuadrático entonces
     Imprimir("El modelo que mejor ajusta es el lineal con R2lineal y coeficientes X)
   sino
     Imprimir("El modelo que mejor ajusta es el lineal con R2lineal y coeficientes X)
   Fin_si
Fin_Funcion
```

```
Funcion CALCULAR_S1(B)
      Bsuma=0
      Para i=1hasta longitud(B) hacer
            Bsuma=Bsuma+B[i]
      Fin_para
      Bpromedio = Bsuma/longitud(B)

      Bsuma=0
      Para i=1hasta longitud(B) hacer
            Bsuma=Bsuma+(B[i]-Bpromedio)^2
      Fin_para
      Retorno(Bsuma)
fin_Funcion
```

```
Funcion MINIMO_CUADRADOS(A, B)
      AT = transpose(A)
      ATA = multiplicar(AT,A)
      I = invertir(ATA)
      ATB = multiplicar(AT, B)
      X = multiplicar(I,ATB)
      Retorno(X)
fin_Funcion
```

IMPLEMENTACIÓN DE LA SOLUCION

RECUERDEN QUE:

Para las operaciones entre matrices:

```
import numpy as np

def MINIMO_CUADRADOS(A, B):
    AT = np.transpose(A)
    ATA = np.dot(AT,A)
    I = np.linalg.inv(ATA)
    ATB = np.dot(AT, B)
    X = np.dot(I,ATB)
    Return X
```

```
def CALCULAR_S1(B):
bsuma=0
a=0
for i in …
        bsuma=bsuma+B[i]
        ….
bprom=(bsuma/a)
s1=0
for i in ….
    s1=s1+((B[i]-bprom)**2)
return s1
```