

Modelado de un sistema oscilatorio
amortiguado

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

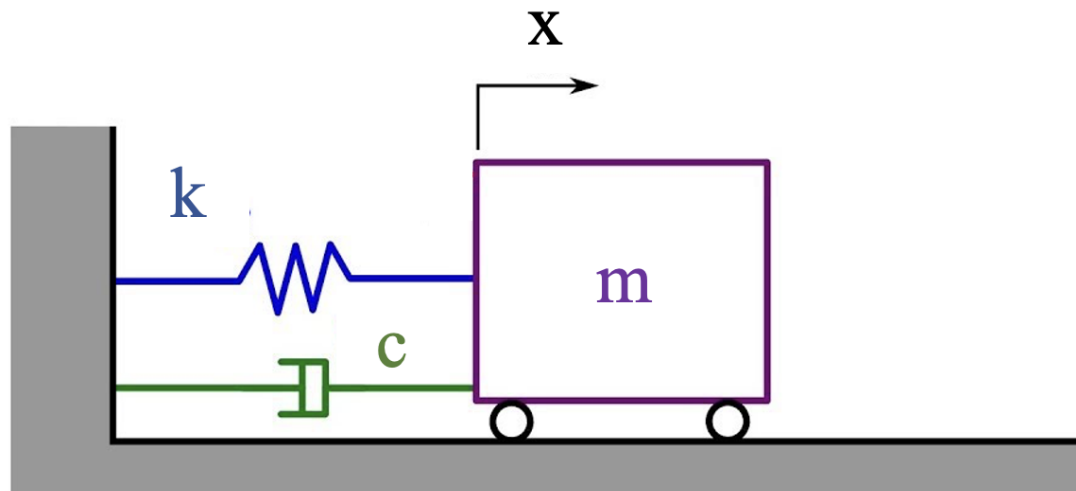
2
0
2
5



Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Un carro con ruedas se sujeta a una pared mediante un resorte y un amortiguador.

Donde **$m = 2 \text{ kg}$** es la masa del carro, **$c = 0.5 \text{ kg/s}$** es la constante de amortiguamiento y **$k = 1 \text{ N/m}$** es la constante del resorte.





Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

En el instante $t=0$, el carro se encuentra en la posición de equilibrio $x(t=0) = 0$ y se lo golpea para darle una velocidad inicial de $v(t=0)=0.1$ m/s. Si la ecuación que modela un **sistema oscilatorio amortiguado** es:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

- m : masa del carro
- c : constante de amortiguamiento
- k : constante del resorte
- $m \frac{d^2 x}{dt^2}$: fuerza de inercia
- $c \frac{dx}{dt}$: fuerza de fricción
- kx : fuerza restauradora del resorte



Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Determinar utilizando el método de segundo orden (con un paso $\Delta t = 0.1s$) el tiempo que tarde el sistema en perder la mitad de su energía mecánica.

Recuerde que la energía mecánica del sistema está dada por:

$$E_M = \frac{mv^2 + kx^2}{2}$$



Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Objetivo: Calcular el tiempo que tarda el sistema oscilatorio amortiguado en perder la mitad de su energía mecánica.

Método a aplicar: Runge-Kutta (RK) – Ralston. Método de segundo orden que genera el menor error de truncamiento.

Otra alternativa es aplicar el método de RK de 4to orden cual es mas aproximado. En este punto se tiene una situación de compromiso entre precisión y simplicidad.



Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Análisis de problema: El sistema oscilatorio amortiguado es modelado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Despejamos $\frac{d^2 x}{dt^2}$:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{-c \, dx/dt - kx}{m}$$

Donde:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$



Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Análisis de problema: Por lo tanto nos queda el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{-c \, dx/dt - kx}{m} = \frac{-c \, v - kx}{m} \end{cases}$$

t es el tiempo y representa la variable independiente

v es la velocidad

x es la distancia

m es la masa del carro

c es la constante de amortiguamiento

k es la constante del resorte



Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Análisis de problema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{-0.5 v - x}{2} \end{cases}$$

t es el tiempo (s)

v es la velocidad (m/s)

x es la distancia (m)

m = 2 kg (masa)

c = 0.5 kg/s (constante de amortiguamiento)

k = 1 N/m (constante del resorte)

Δt = 0.1 s (paso del tiempo)



Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Con este sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{-0.5 v - x}{2} \end{cases}$$

Debemos, calcular el tiempo que tarda el sistema oscilatorio amortiguado en perder la mitad de su energía mecánica. Donde la ecuación de la energía mecánica esta dada por:

$$E_M = \frac{mv^2 + kx^2}{2}$$



Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Para el calculo de la variación de distancia **x** (m) con respecto al tiempo **t** (s), solo la velocidad **v** (m/s):

$$\frac{dx}{dt} = v$$

Por lo tanto podemos escribir en Python de forma general la siguiente función:

```
def xt(v):  
    return (v)
```



Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Para el calculo de la variación de la velocidad **v** (m/s) con respecto al tiempo **t** (s), necesitamos la distancia **x** (m), la masa **m** (2 kg), la constante de amortiguamiento **c** (0.5 kg/s) y la constante del resorte **k** (1 N/m):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-c v - kx}{m}$$

Por lo tanto podemos escribir en Python de forma general la siguiente función:

```
def vt(x, v, c, k, m):  
    return (-c*v - k*x)/m
```



Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Para el calculo de energía mecánica necesitamos la distancia **x** (m), la velocidad **v** (m/s), la masa **m** (2 kg) y la constante del resorte **k** (1 N/m):

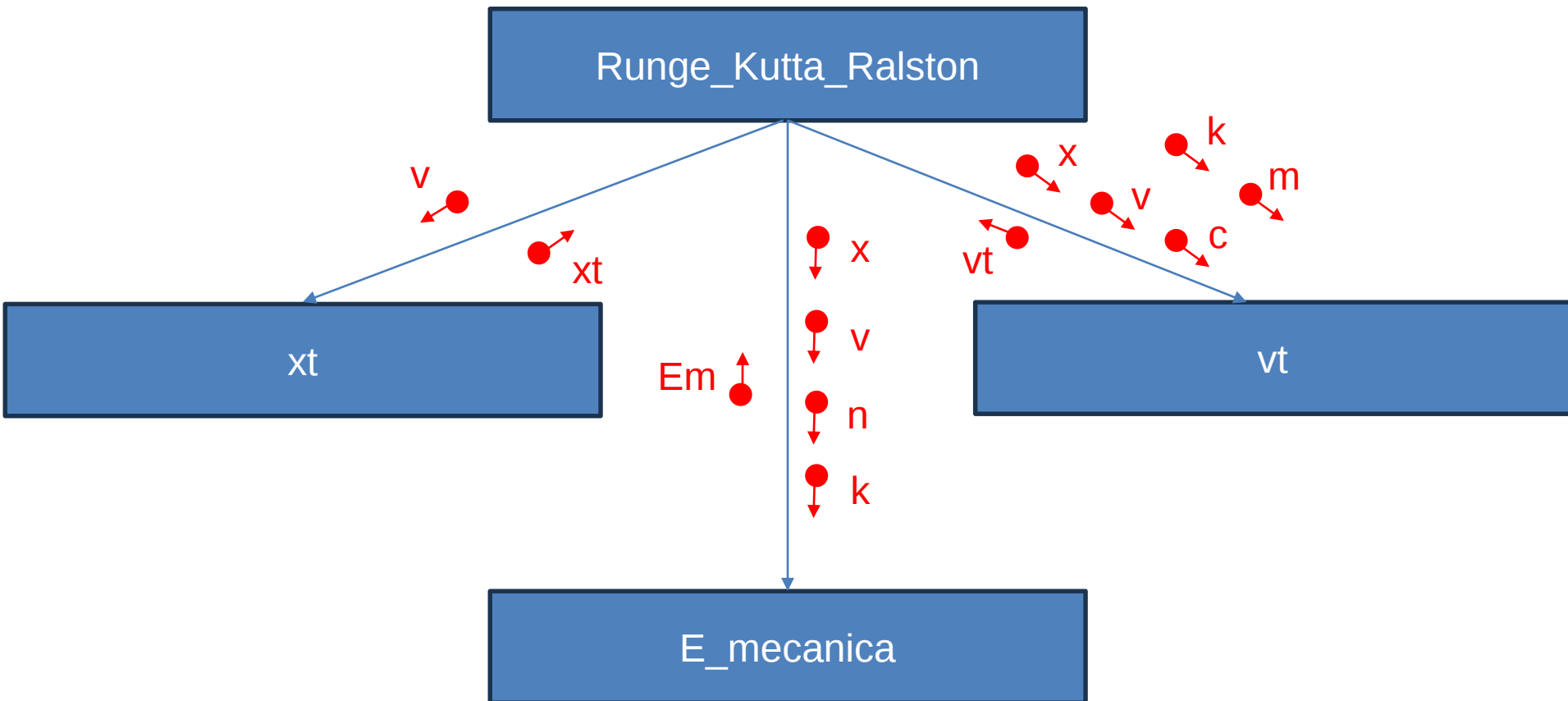
$$E_M = \frac{mv^2 + kx^2}{2}$$

Por lo tanto podemos escribir en Python de forma general la siguiente función:

```
def e_mecanica(x, v, m , k):  
    return (m*(v**2)+k*(x**2))/2
```



Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado





Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Calculo de la condición de corte:

Determinar utilizando el método de segundo orden con un paso $\Delta t = 0.1s$, el tiempo que tarde el sistema en perder la mitad de su energía mecánica.

Por lo tanto podemos escribir en Python de forma general la siguiente función:

```
t = 0.1
Em = e_mecanica(xi, vi, m , k)
Emnuevo = Em+1
while (Emnuevo >= (Em/2)):
    # Mas codigo
    Emnuevo = e_mecanica(xin, vin, m , k)
    t+=0.1
```



Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Las ecuaciones de Runge-Kutta método Ralston:

$$k_1 = f(x_i, v_i) \begin{cases} k_{1xt} = \dot{x}(v_i) \\ k_{1vt} = \dot{v}(x_i, v_i, c, k, m) \end{cases}$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4} * h, v_i + \frac{3}{4} * k_{1vt} * h\right) \begin{cases} k_{2xt} = \dot{x}(v_i + \frac{3}{4} * k_{1vt} * h) \\ k_{2vt} = \dot{v}(x_i + \frac{3}{4} * k_{1xt} * h, v_i + \frac{3}{4} * k_{1vt} * h, c, k, m) \end{cases}$$

$$x_{in} = x_i + \left(\frac{1}{3} * k_{1xt} + \frac{2}{3} * k_{2xt}\right) * h$$

$$v_{in} = v_i + \left(\frac{1}{3} * k_{1vt} + \frac{2}{3} * k_{2vt}\right) * h$$



Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

```
m = 2
c = 0.5
k = 1
xi = 0
vi = 0.1
hf = 0.5
h = 0.1
t = 0

k1xt = xt(vi)
k1vt = vt(xi, vi, c, k, m)
k2xt = xt((vi + ((3/4)*k1vt*h)))
k2vt = vt((xi + (3/4)*k1xt*h), (vi + ((3/4)*k1vt*h)), c, k, m)
```

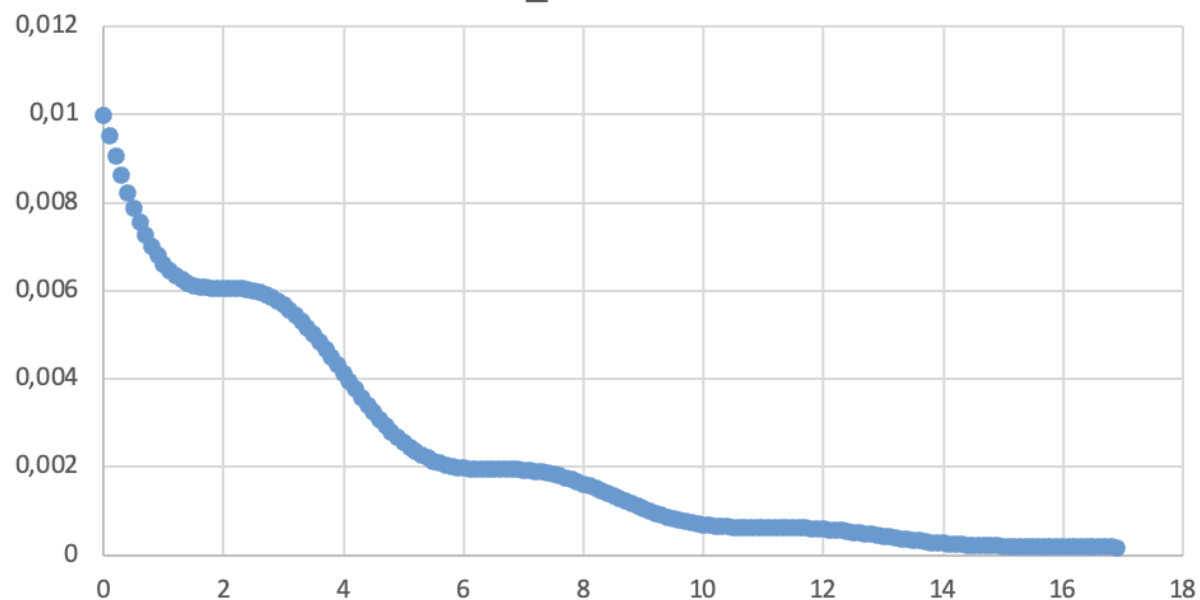


Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

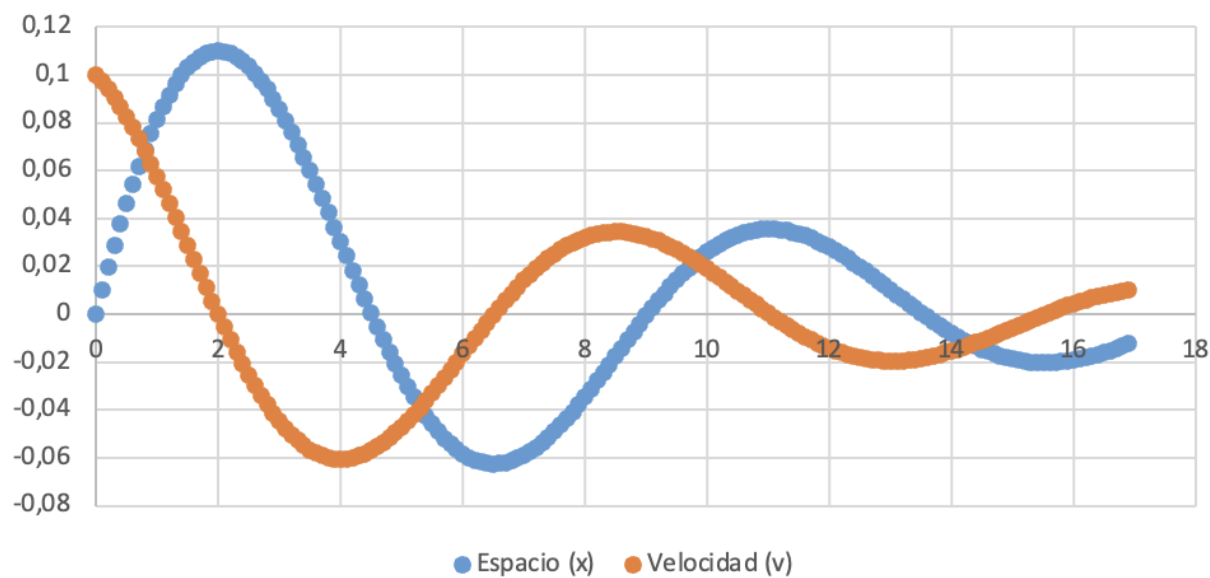
```
Em = e_mecanica(xi, vi, m , k)
t = 0.1
Emnuevo = Em+1
while (Emnuevo >= (Em/2)):
    xin = xi + ((1/3)*k1xt + (2/3)*k2xt) * h
    vin = vi + ((1/3)*k1vt + (2/3) * k2vt) * h
    k1vt = vt(xin, vin, c, k, m)
    k1xt = xt(vin)
    k2vt = vt((xin + (3/4)*k1xt*h), (vin + ((3/4)*k1vt*h)), c, k, m)
    k2xt = xt( (vin + (3/4)*k1vt*h))
    Emnuevo = e_mecanica(xin, vin, m , k)
    xi = xin
    vi = vin
    t+=0.1
print('Tiempo: ' + str(t-0.1))
```



E_mecanica



Espacio (x) y Velocidad (v) en funcion del Tiempo (t)





Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Resultado:

El tiempo que tarda el sistema oscilatorio amortiguado en perder la mitad de su energía mecánica utilizando el método de Runge-Kutta Ralston es de 3.6 segundos.