FACULTAD DE INGENIERÍA
UNICEN • OLAVARRÍA

Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

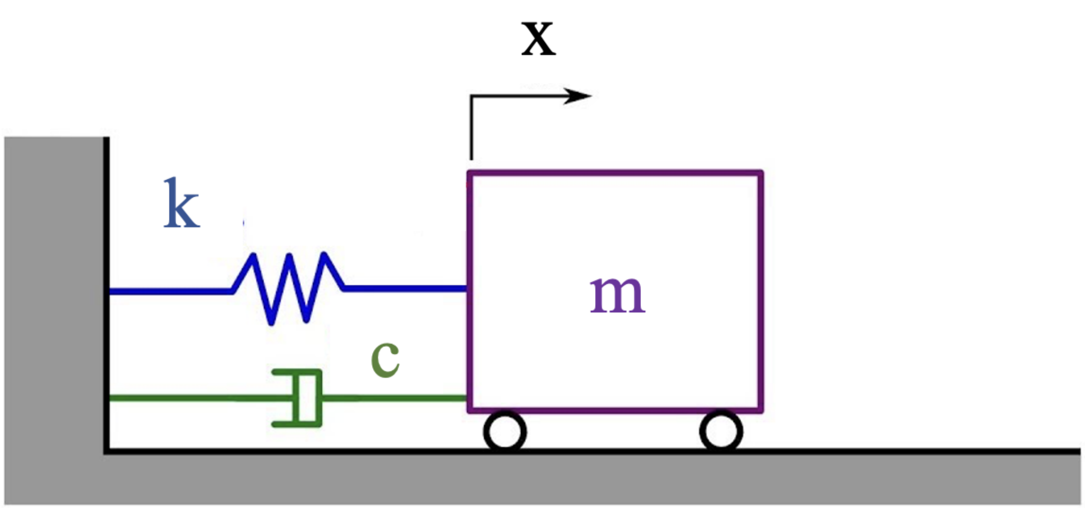
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

2024

Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Un carro con ruedas se sujeta a una pared mediante un resorte y un amortiguador.

Donde **m = 2 kg** es la masa del carro, **c = 0.5 kg/s** es la constante de amortiguamiento y **k = 1N/m** es la constante del resorte.



Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

En el instante **t=0**, el carro se encuentra en la posición de equilibrio **x(t=0) = 0** y se lo golpea para darle una velocidad inicial de **v(t=0)=0.1 m/s**. Si la ecuación que modela un sistema oscilatorio amortiguado es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

- **m:** masa del carro
- **c:** constante de amortiguamiento
- **k:** constante del resorte

Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Determinar utilizando un $\boldsymbol{\Delta t = 0.1 s}$, el tiempo que tarde el sistema en perder la mitad de su energía mecánica.

Recuerde que la energía mecánica del sistema está dada por:

$$E_M = \frac{mv^2 + kx^2}{2}$$

Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Objetivo: Calcular el tiempo que tarda el sistema oscilatorio amortiguado en perder la mitad de su energía mecánica.

Análisis de problema: El sistema oscilatorio amortiguado es modelado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad \text{Despejamos} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-c\frac{dx}{dt} - kx}{m}$$

Teniendo en cuenta que,

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{y} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Análisis de problema: Por lo tanto nos queda el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{-c\dfrac{dx}{dt} - kx}{m} = \dfrac{-cv - kx}{m} \end{cases}$$

t es el tiempo y representa la variable independiente

v es la velocidad

x es la distancia

m es la masa del carro

c es la constante de amortiguamiento

k es la constante del resorte

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{-0.5\, v - x}{2} \end{cases}$$

t es el tiempo (s)

v es la velocidad (m/s)

x es la distancia (m)

m = 2 kg (masa)

c = 0.5 kg/s (constante de amortiguamiento)

k = 1 N/m (constante del resorte)

Δt = 0.1 s (paso del tiempo)

Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Entonces si volvemos al objetivo,
con este sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{-0.5\,v - x}{2} \end{cases}$$

Debemos, calcular el tiempo que tarda el sistema oscilatorio amortiguado en perder la mitad de su energía mecánica. Donde la ecuación de la energía mecánica esta dada por:

$$E_M = \frac{mv^2 + kx^2}{2}$$

Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Método a aplicar:

Runge-Kutta (RK) – Ralston. Método de segundo orden que genera el menor error de truncamiento.

Otra alternativa es aplicar el método de **RK de 4to orden** cual es mas aproximado. En este punto se tiene una situación de compromiso entre precisión y simplicidad.

Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Las ecuaciones de Runge-Kutta método Ralston:

$$k_1 = f(x_i, v_i) \begin{cases} k_1 xt = f(v_i) \\ k_1 vt = f(x_i, v_i, c, k, m) \end{cases}$$

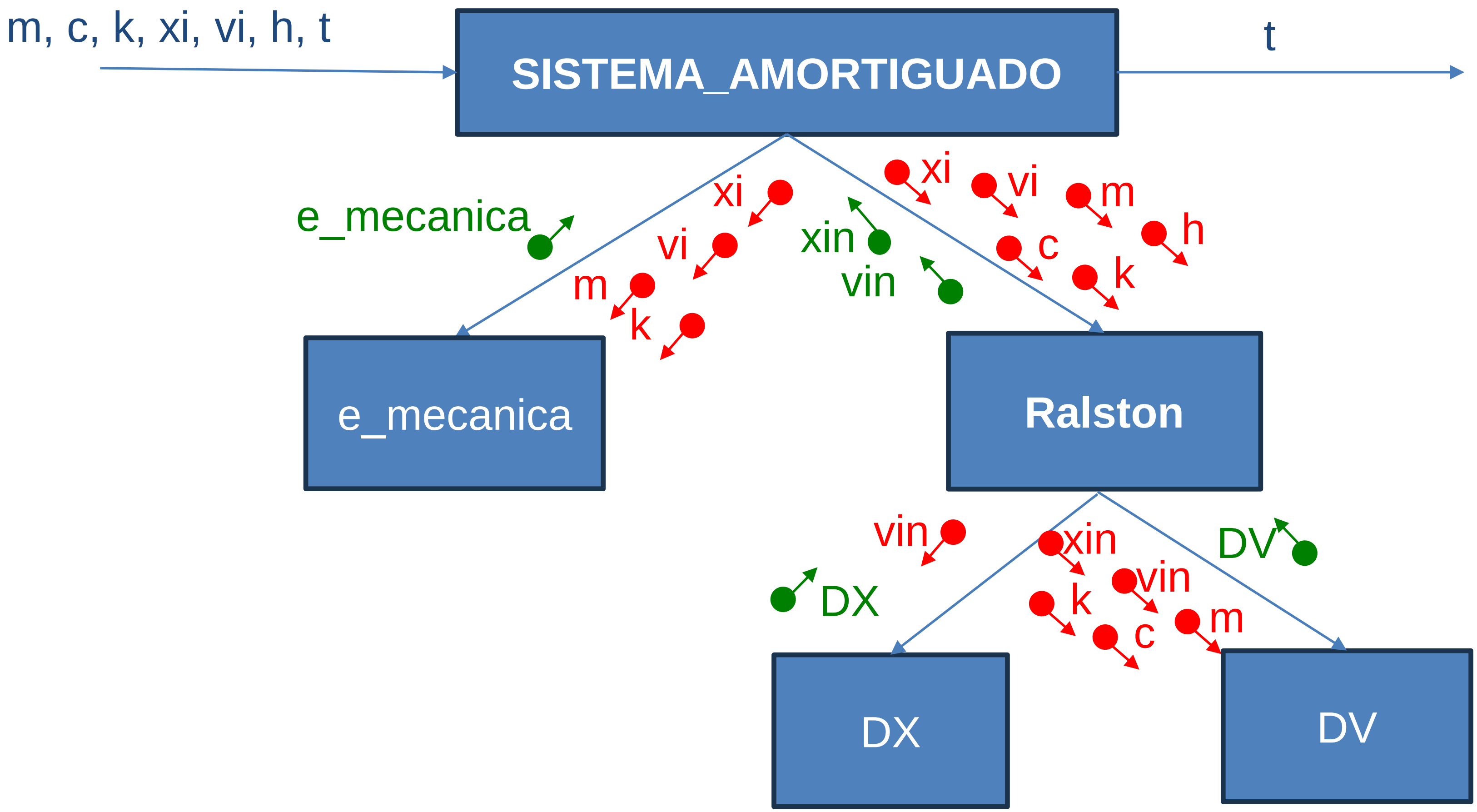
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4} * h, v_i + \frac{3}{4} * k_i * h\right) \begin{cases} k_2 xt = f(v_i + \frac{3}{4} * k_1\ vt * h) \\ k_2 vt = f(x_i + \frac{3}{4} * h, v_i + \frac{3}{4} * k_1\ vt * h, c, k, m) \end{cases}$$

$$xin = xi + \left(\frac{1}{3} * k1xt + \frac{2}{3} * k2xt\right) * h$$

$$vin = vi + \left(\frac{1}{3} * k1vt + \frac{2}{3} * k2vt\right) * h$$

Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Diseño de problema:



Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Diseño de problema: Algoritmo

Inicializar o leer datos de entrada
Inicializar la variable independiente tiempo

Calcular energía mecánica
Calcular velocidad y espacio con Ralston para el tiempo ac
Actualizar la energía mecánica
actualizar velocidad y espacio
Incrementar el tiempo en el paso

Repetir hasta que la energía llegue a la mitad

Mostrar el tiempo

Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Para el calculo de la variación de distancia **x** (m) con respecto al tiempo **t** (s), solo la velocidad **v** (m/s):

$$\frac{dx}{dt} = v$$

Por lo tanto podemos escribir en Python de forma general la siguiente función:

```python
def dx(v):
    return (v)
```

Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Para el calculo de la variación de la velocidad **v** (m/s) con respecto al tiempo **t** (s), necesitamos la distancia **x** (m), la masa **m** (2 kg), la constante de amortiguamiento **c** (0.5 kg/s) y la constante del resorte **k** (1 N/m):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-c\,v - kx}{m}$$

Por lo tanto podemos escribir en Python de forma general la siguiente función:

```
def dv(x, v, c, k, m):
    return (-c*v - k*x)/m
```

Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Para el calculo de energía mecánica necesitamos la distancia **x** (m), la velocidad **v** (m/s), la masa **m** (2 kg) y la constante del resorte **k** (1 N/m):

$$E_M = \frac{mv^2 + kx^2}{2}$$

Por lo tanto podemos escribir en Python de forma general la siguiente función:

```
def e_mecanica(x, v, m , k):
    return (m*(v**2)+k*(x**2))/2
```

Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Calculo de la condición de corte:

Determinar utilizando el método de segundo orden con un paso $\Delta t = 0.1s$, el tiempo que tarde el sistema en perder la mitad de su energía mecánica.

Por lo tanto podemos escribir en Python de forma general la siguiente función:

```
t = 0.1
Em = e_mecanica(xi, vi, m , k)
Emnuevo = Em+1
while (Emnuevo >= (Em/2)):
    # Mas codigo
    Emnuevo = e_mecanica(xin, vin, m , k)
    t+=0.1
```

Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

```python
def Ralston(xi,vi,xin,vin,c,k,m,h):
    k1vt = dv(xin, vin, c, k, m)
    k1xt = dx(vin)
    k2vt = dv((xin + (3/4)*h), (vin + ((3/4)*k1vt*h)), c, k, m)
    k2xt = dx( (vin + (3/4)*k1vt*h))

    xin = xi + ((1/3)*k1xt + (2/3)*k2xt) * h
    vin = vi + ((1/3)*k1vt + (2/3) * k2vt) * h
    return(xin,vin)
```

Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

```
m = 2
c = 0.5
k = 1
xi = 0
vi = 0.1
h = 0.1
t = 0
xin=xi
vin=vi

Em = e_mecanica(xi, vi, m , k)
Emnuevo = Em+1
t+=h
while (Emnuevo >= (Em/2)):
    xin,vin=Ralston(xi,vi,xin,vin,c,k,m,h)
    Emnuevo = e_mecanica(xin, vin, m , k)
    xi = xin
    vi = vin
    t+=h
print('Tiempo: ' + str(t-0.1))
```

Modelado de un sistema oscilatorio amortiguado

Resultado:

El tiempo que tarda el sistema oscilatorio amortiguado en perder la mitad de su energía mecánica utilizando el método de Runge-Kutta Ralston es de 3.6 segundos.